Solución y graficación de E.D por medio de software.

Jhon Lopera Cortés

Solución simbólica usando Matlab

Resolvamos la siguiente ecuación usando dsolve de Matlab

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x} + x^2 + \sin(x)$$

Para resolver una ecuación diferencial sin condiciones iniciales, de forma simbólica (usando variables simbólicas de Matlab) se usa la siguiente instrucción:

dsolve (‘ecuación diferencial', 'variable dependiente’)

Nota: Tanto la ecuación como la variable deben ir entre comillas

Solución simbólica usando Matlab

Veamos como quedaría la expresión anterior al colocarla en dsolve.

```
y=dsolve('D2y+2*Dy+2*y = exp(-x)+x^2 + sin(x)','x');
```

Normalmente la expresión que entrega Matlab es bastante larga, por es se recomienda almacenar el valor que retorna dsolve en una variable y luego usar el comando “simplify” para simplificar la ecuación.

```
ys=simplify()
```

Nota: no es necesario definir y ni ys como simbolicas

Solución simbólica usando Matlab

Finalmente Matlab nos entregara un resultado como el siguiente:

```
ys=exp(-x) - x - (2*cos(x))/5 + sin(x)/5 + x^2/2 + C2*exp(-x)*cos(x) + C3*exp(-x)*sin(x) + 1/2
```

```
                                                                          2
              2 cos(x)   sin(x)   11 exp(-x) cos(x)   7 exp(-x) sin(x)   x    1
exp(-x) - x - -------- + ------ - ----------------- + ---------------- + -- + -
                  5         5             10                 10           2   2
```

La primera es la solución simplificada y la segunda la que se obtiene luego de usar el comando “pretty”

Solución de un PVI usando dsolve

La idea es resolver la misma ecuación diferencial de antes

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x} + x^2 + \sin(x)$$

Usando como condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$

La única variación en el comando dsolve para resolver problemas con valor inicial, es que se deben colocar las condiciones iniciales luego de la ecuación diferencial. Así:

dsolve (‘E.D’, ‘condición 1’,’condición 2’,…, ‘condición_n’ ,’variable dependiente’)

Solución de un PVI usando dsolve

El número de condiciones iniciales debe ser igual al orden de la ecuación diferencial.

Sintaxis:

$$'y(x_0) = y_0', 'Dy(a) = b', \ '\mathrm{D2y(c) = d}' \ldots$$

Resolvamos el PVI planteado anteriormente:

```
y=dsolve('D2y+2*Dy+2*y = exp(-x)+x^2 + sin(x)' , 'y(0)=0' , 'Dy(0)=0' , 'x');
ys=simplify(y); %se simplifica la ecuación resultante
pretty(ys) % Se pone bonita
```

Solución de un PVI usando dsolve

El resultado que nos da Matlab es el siguiente:

```
                                                                    2
           2 cos(x)   sin(x)   11 exp(-x) cos(x)   7 exp(-x) sin(x)   x    1
exp(-x) - x - -------- + ------ - ----------------- + ---------------- + -- + -
              5          5              10                  10          2    2
```

Cuando se resuelve la ecuación diferencial con un PVI asociado es posible graficar la solución (No se puede graficar la solución general ya que esta corresponde a una familia de curvas).

Grafica de un PVI usando ezplot

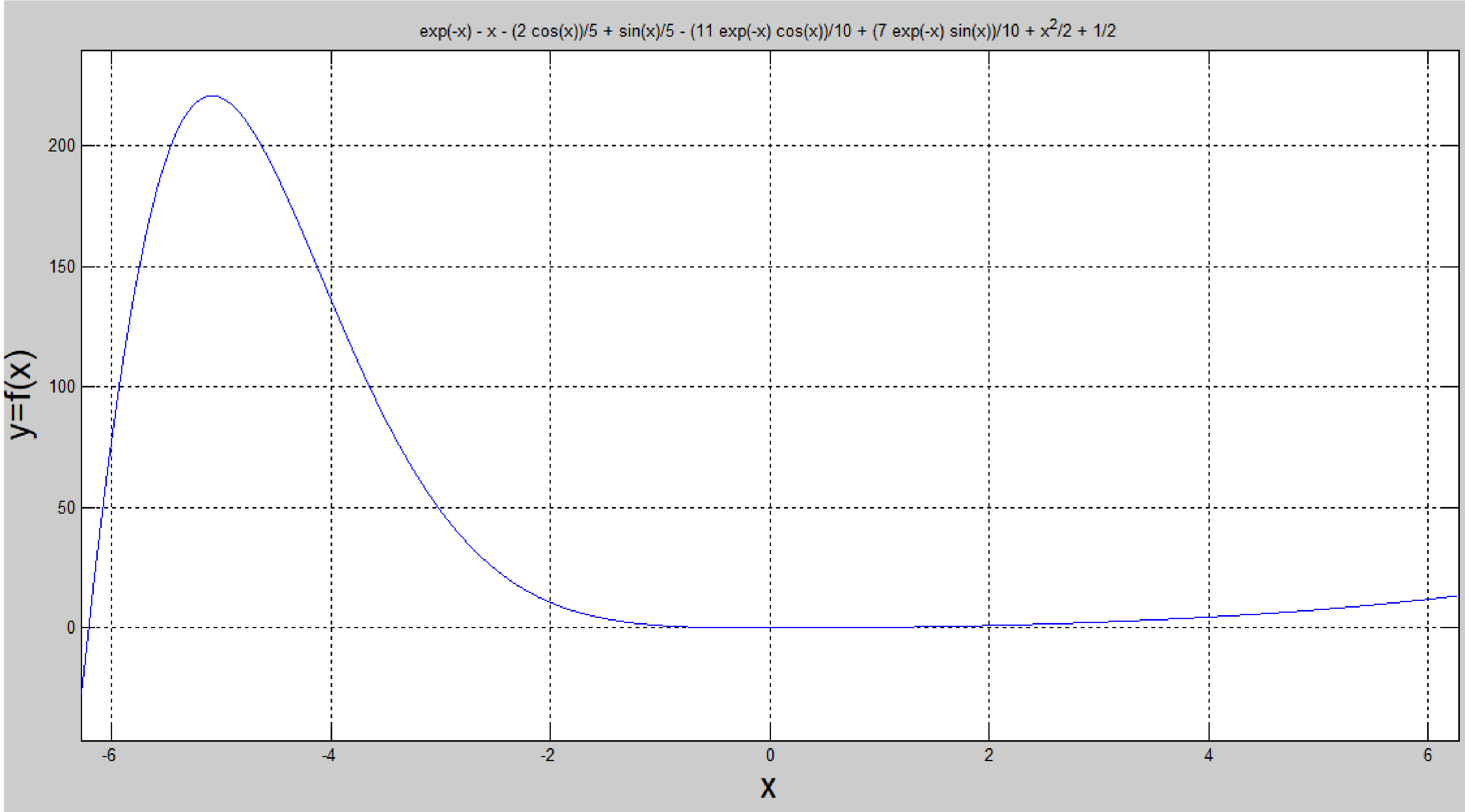
Para graficar la solución de un PVI en Matlab se puede hacer uso de la instrucción ezplot.

```
ezplot(resultado obtenido de la instrucción dsolve o simplify)
```

Veamos como se gráfica de ejercicio anterior.

```
ezplot(ys) % se grafica la ecuación simplificada
grid() % se coloca una cuadricula
xlabel('x’) %nombre de eje x
ylabel ('y=f(x)’) %nombre del eje y
```

Grafica de un PVI usando ezplot



Solución de un PVI usando dsolve

Ejercicio:

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$(D^4 + 5D^2 + 4)y = 4$$

Con $y(0) = 0,\ y'(0) = 0\ y''(0) = 0, y''(0) = 0$

Solución usando Matlab

```
y=dsolve('D4y+5*D2y+4*y=4','y(0)=0, Dy(0)=0, D2y(0)=0, D3y(0)=0','x')
ys=simplify(y)
pretty(ys);
ezplot(y)
grid()
xlabel('x','fontSize',20)
ylabel ('y=f(x)','fontSize',20)
```

Solución de una E.D por métodos numéricos

Solucionar el siguiente PVI

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 20\sin(y) = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

Para solucionar la ecuación diferencial usando un método numérico se usa el comando “ode45” de Matlab.

Lo primero es dividir el problema de la siguiente forma

$$y_1 = y \quad y_2 = \frac{dy_1}{dx}$$

De esta forma se obtiene que

$$\frac{dy_2}{dx} = -xy_2 - 20\sin(y_1)$$

Solución de una E.D por métodos numéricos

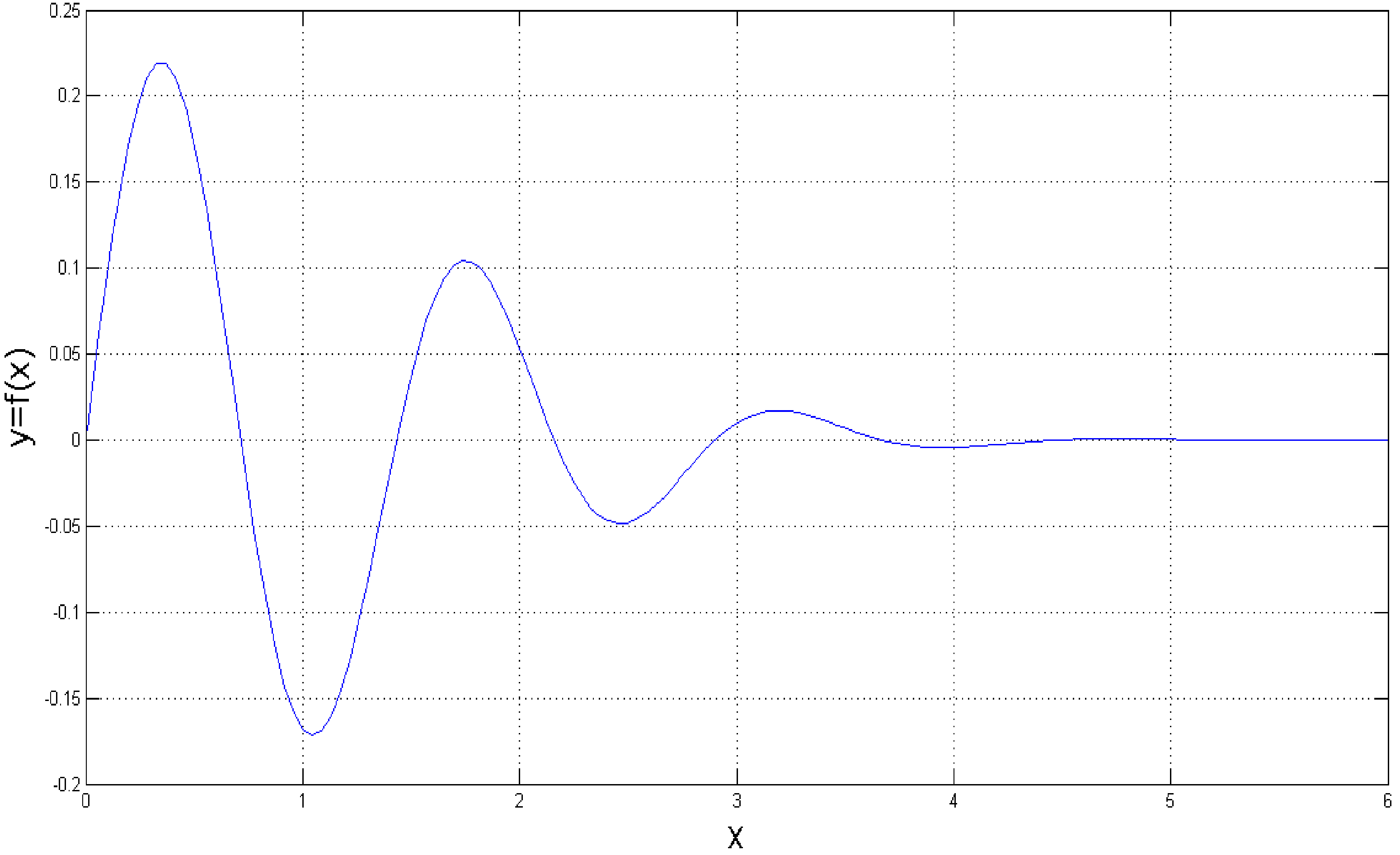
Para resolver el PVI anterior se hace lo siguiente:

```
%Se define tipo función ode que usa para resolver la E.D en 2 partes
%Primero para y2 y luego para y1 (esta es la que nos interesa)
f=@(x,y) [y(2);-x*y(2)-20*sin(y(1))];

xspan=[0 6]; % se define la región donde se hallará la solución
y0=[0,1]; % Se pasan las condiciones iniciales (primero y(a) y luego y’(b))

%ode45 recibe como argumentos la función ode, la región y las condiciones iniciales
[x,y]=ode45(f,xspan,y0);
plot(x,y(:,1)) %se grafica solo la primera columna
```

Solución de una E.D por métodos numéricos



Solución de una E.D por métodos numéricos

Ode45 nos entrega un conjunto de puntos en una matriz de tantas columnas como el orden de la ecuación diferencial. Esto quiere decir que no tendremos una respuesta de la misma forma que cuando se resolvía por la forma analítica, sino que tendremos un conjunto de puntos que podemos representar gráficamente.

En la primera columna se tienen los puntos que corresponden a la solución de y_1, es decir a y, que corresponde a la solución de la E.D.

En la columna 3 se tiene y_2 que corresponde a la primera derivada de y.

Si se tuvieran mas columnas la segunda columna correspondería a la segunda derivada de y

Solución de un PVI usando Python

Para solucionar un PVI en Python se hará uso de la instrucción odeint, que es un método que esta implementado en la librería scipy.

odeint soluciona la ecuación diferencial de forma numérica en una determinada región (Se debe garantizar solución en dicha región)

La sintaxis que usaremos será la siguiente:

```
Sol=odeint(df,y0,x)
```

Nota:El comando odeint tiene mas argumentos, pero nos ocuparemos de usar solo estos 3, los demás se dejaran por defecto.

Solución de un PVI usando Python

Solucionar la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 20\sin(y) = 0 \; con \; y(0) = 0 \; y \; y'(0) = 1$$

Para solucionar la ecuación diferencial usando "odeint" lo primero es dividir el problema de forma que se tenga el siguiente sistema de ecuaciones.

$$y_1 = y \quad y_2 = \frac{dy_1}{dx}$$

De esta forma se obtiene que

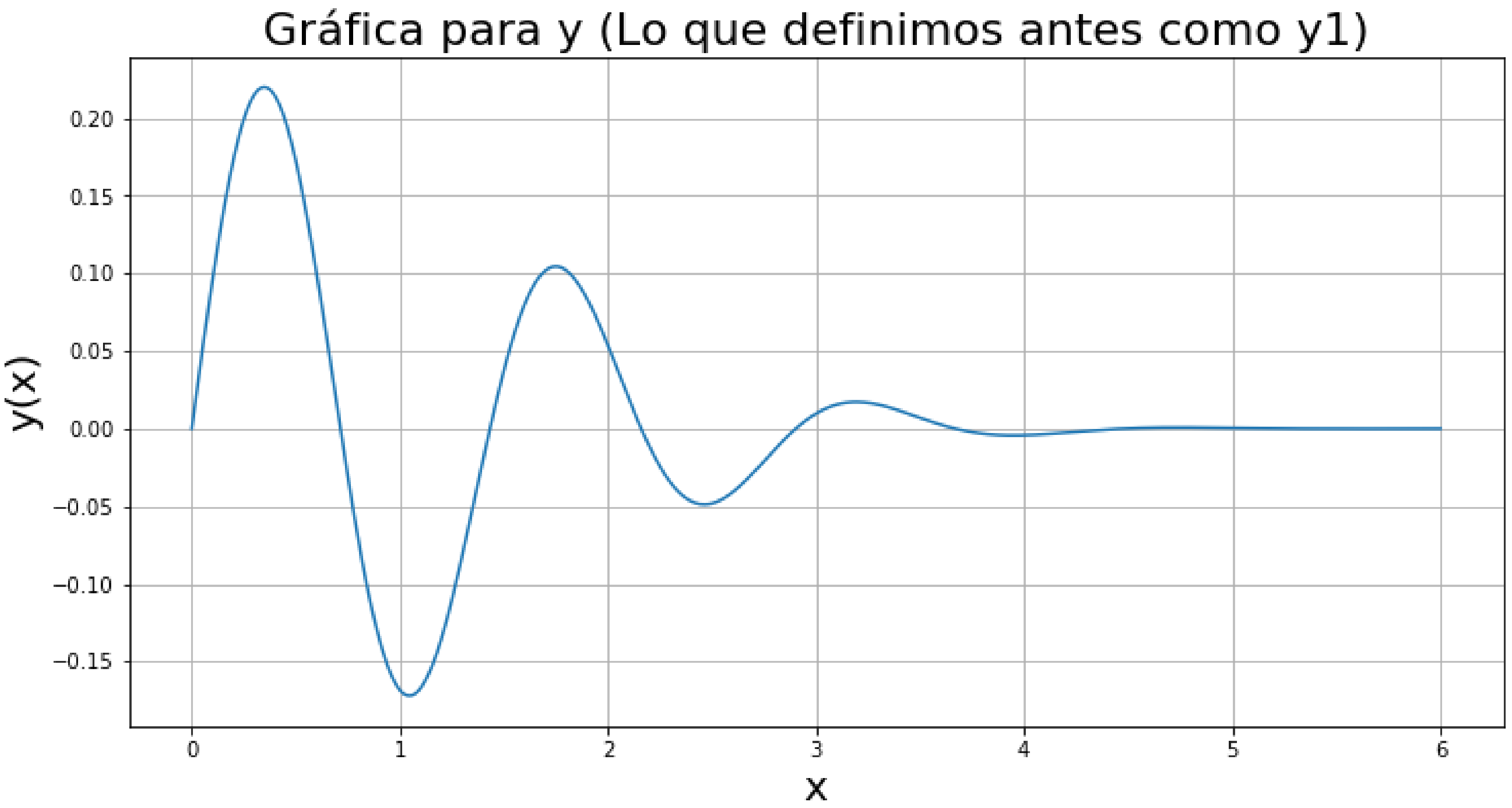
$$\frac{dy_2}{dx} = -xy_2 - 20\sin(y_1)$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import *
from scipy.integrate import odeint

def df(y,x):
    y1, y2= y[0], y[1] #Se le asigna una posición en el vector solución a y1 y y2
    dy1=y2
    dy2=-x*y2-20*sin(y1)
    return [dy1,dy2]


y0 =[0,1] # Condiciones iniciales
x = linspace(0,6,500) # Definición del rango
sol = odeint(df, y0, x) # la función odeint se encarga de dar los argumentos a la
función df(el rango “x” y la variable “y”)
y=sol[:,0] #toma el vector correspondiente a la solución de y1
plt.plot(x,y)
plt.grid(True)
plt.show()
```

Solución de un PVI usando Python



Solución de E.D con Máxima (Solución simbólica)

Máxima tiene varios comandos que sirven para solucionar una ecuación diferencial de forma simbólica.

El primer comando que veremos es ode2, que sirve para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de grado 1 o 2.

Sintaxis:

Ode2(ed,y,x)

ed: Ecuación diferencial que se quiere resolver
y: Variable dependiente
x: Variable independiente

Solución de E.D con Máxima (Solución simbólica)

Solucionar la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=e^{-x}+x^2+sen(x), con\ y(0)=0\ y\ y'(0)=1$$

Para solucionar la ecuación diferencia con ode2 en Maxima primero debemos escribir la ecuación diferencial en la notación exige Maxima. Así:

```
ed:'diff(y,x,2)+2*'diff(y,x,1)+2*y=%e^-x+x^2+sin(x);
```

'diff(y,x,2) :Segunda derivada de y respecto a x
'diff(y,x,1) :Primera derivada de y respecto a x

Solución de E.D con Máxima (Solución simbólica)

Luego de asignar la ecuación diferencial a la variable “ed” en el formato de Maxima, se procede a usar el comando ode2 para obtener la solución general.

```
ed:'diff(y,x,2)+2*'diff(y,x,1)+2*y=%e^-x+x^2+sin(x);
Ode2(ed,y,x);
```

La solución que entrega Maxima es:

$$y=\frac{\%e^{-x}\left(2\,\%e^{x}\sin(x)-4\,\%e^{x}\cos(x)+\left(5x^{2}-10x+5\right)\%e^{x}+10\right)}{10}+\%e^{-x}\left(\%k1\sin(x)+\%k2\cos(x)\right)$$

Solución de un PVI usando Maxima

Para solucionar un PVI con Maxima lo que haremos será encontrar la solución general de la ecuación diferencial usando la instrucción ode2 y luego hallar la solución de la ecuación usando los valores iniciales que nos dan mediante el comando ic2.

ic2 me permite hallar el PVI de una ecuación diferencial de hasta orden 2.

Sintaxis:

$$\text{Ic2}(sln, x_0,\ y_0,\ y'_0)$$

Sln: es la solución que se obtiene de ejecutar ode2

$x_0,\ y_0,\ y'_0$ son los puntos iniciales y el valor de la derivada en esos puntos

Solución de un PVI usando Maxima

Se escribe la ecuación diferencial

```
ed:'diff(y,x,2)+2*'diff(y,x,1)+2*y=%e^-x+x^2+sin(x);
```

Se halla la solución general usando ode2

```
sln:ode2(ed,y,x);
```

Se evalúan las condiciones iniciales

```
y:ic2(sln,x=0,y=0,'diff(y,x)=0);
```

La solución que entrega Maxima es

$$y=\frac{\%e^{-x}\left(2\,\%e^{x}\sin(x)-4\,\%e^{x}\cos(x)+\left(5x^{2}-10x+5\right)\%e^{x}+10\right)}{10}+\%e^{-x}\left(\frac{7\sin(x)}{10}-\frac{11\cos(x)}{10}\right)$$

Gráfica Solución de un PVI usando Maxima

Para graficar un PVI que fue resuelto usando ic2 y ode2, tenemos como opción copiar la solución que nos entrega Maxima (clic derecho copiar como texto plano) almacenarla en una variable y luego usar el comando plotd2.Así:

```
y2:(%e^(-x)*(2*%e^x*sin(x)-4*%e^x*cos(x)+(5*x^2-
10*x+5)*%e^x+10))/10+%e^(-x)*((7*sin(x))/10-(11*cos(x))/10);
plot2d(y2,[x,-6,6])
```

Plot2d recibe como argumento la solución del PVI (lo que resulta luego de usar ic2) y la región donde se quiere graficar.

Gráfica Solución de un PVI usando Maxima